

ANHANG B KUGELKOORDINATEN UND - FUNKTIONEN

B.1 DIE GRUNDGLEICHUNGEN IN KUGELKOORDINATEN

B.1(a) Bewegungsgleichung

In Kap. 1.1(a) wurden die generalisierten Koordinaten p_i, q_i der Hamiltonfunktion angesprochen. Wegen der Kugelgestalt der Erde ist es für die Meteorologie nahelegend, insbesondere bei der Untersuchung globaler Aspekte, statt der kartesischen Koordinaten $q_i = x, y, z$ Kugelkoordinaten $q_i = \lambda, \varphi, r$ zu verwenden, wobei λ der Längswinkel ist, der den Abstand vom Greenwich - Meridian mißt, und φ der Breitenwinkel, der den Abstand vom Äquator mißt. Kugelkoordinaten werden auch zur Definition des Raumwinkels verwendet (\rightarrow Kap. 7.2(b), Formel (7-7)). In der dortigen Skizze entspricht der "Horizont" dem Äquator, der "Zenit" dem Nordpol und der Azimutwinkel α entspricht der geographischen Länge λ . Die Breite φ als "Äquator-Abstandswinkel" entspricht dort einem "Horizont-Abstandswinkel", also *nicht* dem in Kap. 7.2(b) verwendeten "Zenit-Abstandswinkel" $\vartheta \triangleq 90^\circ - \varphi$. - Die generalisierten Geschwindigkeiten sind gegeben durch

$$\dot{q}_i = dq_i/dt = \dot{\lambda}, \dot{\varphi}, \dot{r} \quad \text{Bei Anwendung des Operators}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial}{\partial q_3}$$

auf q_i selbst muß sich eine Identität mit \dot{q}_i ergeben:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \dot{q}_1 \frac{\partial q_i}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial q_i}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial q_i}{\partial q_3} = \dot{q}_i \rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}$$

Das bedeutet, daß die generalisierten Koordinaten zeitunabhängig und orthogonal sein müssen. Die generalisierten Geschwindigkeiten werden verwendet in der in Kap. 1.6 und in Kap. 10.1(a) erwähnten Lagrange-Funktion zweiter Art. Sie wird mit der Kinetischen Energie K und der Potentiellen Energie Φ gebildet und lautet im *Absolut-system*

$$L = K^{(A)}(q_i, \dot{q}_i) - \Phi^{(A)}(q_i)$$

Hinkelmann (1969) überführt die Bewegungsgleichung in Kugelkoordinaten durch eine entsprechende Spezialisierung der generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten. Als Bewegungsgleichung verwendet Hinkelmann (1969):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial q_k}$$

Verglichen mit den in Anhang D.3 angegebenen Lagrange-Gleichungen II. Art ist hier jedoch durch den Druckgradienten $\partial p / \partial q_k$ eine "Mischform" mit einer Euler'schen

Darstellung vorgegeben worden. Das Problem der Gewinnung einer Euler'schen Hydrodynamik aus dem Hamiltonprinzip ist hier also *nicht* gelöst worden (\rightarrow jedoch Kap. 10.3(c)). - Die Gewinnung der sphärischen Bewegungsgleichung gelingt aber dennoch. Zunächst bestimmen wir die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen in kartesischen Koordinaten *im Absolutsystem*, wo wir den Wind mit \mathbf{v}_a bezeichnen:

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{v}_a^2 - \Phi^{(A)}(x, y, z) = \frac{v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2}{2} - \Phi^{(A)}(x, y, z)$$

(Im Relativsystem muß man $K^{(A)}$ und $\Phi^{(A)}$ durch Relativkoordinaten ausdrücken). Wegen $\partial L / \partial v_{ax} = v_{ax}$ und $-\partial L / \partial x = \partial \Phi^{(A)} / \partial x$ folgt sofort

$$\frac{dv_{ax}}{dt} = - \frac{\partial \Phi^{(A)}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = - \nabla \Phi^{(A)} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

Um zu Kugelkoordinaten überzugehen, verwenden wir folgende Beziehungen zwischen den kartesischen und den sphärischen Inkrementen

$$(B-1) \quad \delta\varphi = \frac{\delta y}{r} ; \quad \delta\lambda = \frac{\delta x}{r \cos\varphi} ; \quad \delta r = \delta z \quad \text{so daß}$$

$$(B-2) \quad v_y = r\dot{\varphi} \equiv v_\varphi, \quad v_x = r \cos\varphi \dot{\lambda} \equiv v_\lambda, \quad v_z = \dot{r} \equiv v_r$$

Dabei sind die Größen $\dot{\varphi}$, $\dot{\lambda}$, \dot{r} generalisierte Geschwindigkeiten, v_φ , v_λ und v_r jedoch *nicht*. - In der Lagrange-Funktion werden jetzt die Kinetische und die Potentielle Energie im Absolutsystem durch den Relativwind $\mathbf{v} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_f$ und das Schwerepotential ("effektives Potential") $\Phi = \Phi^{(A)} - \mathbf{v}_f^2/2$ ausgedrückt (\rightarrow Kap. 2.2(f)):

$$\text{mit} \quad L = \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_f)^2 - \left(\Phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}_f^2 \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_f) - \Phi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= r \cos\varphi \dot{\lambda} \mathbf{e}_\lambda + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{r} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{v}_f &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = [\omega \sin\varphi \mathbf{e}_r + \omega \cos\varphi \mathbf{e}_\varphi] \times r \mathbf{e}_r = r \omega \cos\varphi \mathbf{e}_\lambda \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_f &= r^2 \omega \cos^2\varphi \dot{\lambda} \end{aligned}$$

durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \left[r^2 \cos^2\varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 + 2r^2 \omega \cos^2\varphi \dot{\lambda} \right] - \Phi(\lambda, \varphi, r) \quad \text{oder} \\ L &= \frac{1}{2} \left[r^2 \cos^2\varphi \left[\dot{\lambda}^2 + 2 \omega \dot{\lambda} \right] + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right] - \Phi(\lambda, \varphi, r) \end{aligned}$$

Das ergibt die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(r^2 \cos^2\varphi \left[\dot{\lambda} + \omega \right] \right) - \left(- \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \dot{\varphi} \right) - \left(r^2 \cos\varphi \left[\dot{\lambda}^2 + 2 \omega \dot{\lambda} \right] (-\sin\varphi) - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \frac{d}{dt} (\dot{r}) - \left(r \cos^2\varphi \left[\dot{\lambda}^2 + 2 \omega \dot{\lambda} \right] + r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \end{aligned}$$

Entsprechend (B-2) werden hier v_φ , v_λ , v_r eingesetzt:

$$\frac{d}{dt} \left(r \cos\varphi v_\lambda + r^2 \cos^2\varphi \omega \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (i)$$

$$\frac{d}{dt} \left(r v_\varphi \right) + \underline{v_\lambda^2 \tan\varphi} + \underline{v_\lambda} 2\omega r \sin\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (ii)$$

$$\frac{d}{dt} v_r - \frac{v_\lambda^2}{r} - \underline{v_\lambda} 2\omega \cos\varphi - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (iii)$$

Durch Anwendung der Produkt- und Kettenregel für (i) und (ii), durch Division von (i) und (ii) durch $r \cos\varphi$ bzw. r sowie mit $f = 2\omega \sin\varphi$, $l = 2\omega \cos\varphi$ ergibt sich

$$\frac{dv_\lambda}{dt} + \frac{v_\lambda v_r}{r} - \underline{v_\lambda v_\varphi \frac{\tan\varphi}{r}} + \underline{l v_r} - f v_\varphi = - \frac{1}{r \cos\varphi \rho} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (i)$$

$$(B-3) \quad \frac{dv_\varphi}{dt} + \frac{v_\varphi v_r}{r} + \underline{v_\lambda^2 \frac{\tan\varphi}{r}} + f v_\lambda = - \frac{1}{r \rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad (ii)$$

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\lambda^2}{r} - \frac{v_\varphi^2}{r} - \underline{l v_\lambda} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (iii)$$

wobei die totale Ableitung in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$(B-4) \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{r \cos\varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \underline{v_r} \frac{\partial}{\partial r}$$

In der Literatur werden die drei Komponentengleichungen (B-3) und die totale Ableitung (B-4) häufig ohne *die* Terme ~~an~~ geschrieben, welche hier durch Unterstriche gekennzeichnet sind. Eine "großräumige Scale - Analyse" ergibt, daß sie gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden können. - Kann man diese sphärischen Gleichungen auch *ohne* den "Umweg" über *generalisierte* Koordinaten gewinnen, indem man die bekannten *kartesischen* Komponentengleichungen mit Hilfe von (B-1) und (B-2) *direkt* überführt? Die x-Komponente der Bewegungsgleichung lautet nach Kap 3.1(b)

$$\frac{dv_x}{dt} = f v_y - l v_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

also nach Anwendung von $v_x = v_\lambda$, $v_y = v_\varphi$, $v_z = v_r$, $\delta\lambda = \delta x / (r \cos\varphi)$:

$$\frac{dv_\lambda}{dt} = f v_\varphi - l v_r - \frac{1}{\rho r \cos\varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad (FEHLER !)$$

Dies wäre offenbar falsch, denn gegenüber (B-3) (i) fehlten zwei Terme, nämlich $v_\lambda v_r / r$ und $v_\lambda v_\varphi \tan\varphi / r$. *Eine direkte Überführung einer in kartesischen Komponenten geschriebenen Gleichung in Kugelkoordinaten ist also nicht erlaubt!* Sowohl die kartesischen als auch die sphärischen Komponentengleichungen (B-3) kann man nur

"direkt" gewinnen, *entweder* durch Spezialisierung von Gleichungen in *generalisierten* Koordinaten *oder* durch Komponentenzzerlegung aus *vektoriellen* Gleichungen. Die Herleitung der sphärischen Gleichungen aus kartesischen Gleichungen führt jedoch zu den hier aufgedeckten Fehlern. Um den Grund dafür kennenzulernen, betrachten wir im folgenden die Komponentenzzerlegung der *vektoriellen* Bewegungsgleichung nach sphärischen Koordinaten. Dazu reicht es aus, den vektoriellen nichtlinearen Advektionsterm zu betrachten:

$$(B-5) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left(v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{r \cos \varphi \partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{\partial}{r \partial \varphi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right)$$

Das erste Skalarprodukt kann ausmultipliziert werden. So erhält man den *Advektionsoperator* in Kugelkoordinaten:

$$(B-6) \quad \mathbf{v} \cdot \nabla = \frac{v_\lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial}{\partial r}$$

Bei der "anschließenden" Anwendung dieses Operators auf $\mathbf{v} = v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k}$ ist die Produktregel zu beachten, denn es sind *auch* Ableitungen nach den Basisvektoren zu bilden! Diese verschwinden *nur bei Verwendung kartesischer Koordinaten!* Hier ist also unbedingt die REGEL zu beachten, daß man bei der Zerlegung einer Vektorgleichung in nichtkartesische Koordinaten *erst* differenzieren muß, und *dann* erst die Komponentenbildung durch Multiplikation mit den Basisvektoren vollziehen darf. Bildet man nämlich schon im ersten Schritt die Komponenten, so fallen bei der entsprechenden Skalarmultiplikation die Basisvektoren in $v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k}$ fort, auf die aber der Operator (B-6) im Rahmen der Produktregel noch zugreifen müßte! Genau dieser Fehler ist bei dem "~~verbotenen~~ Umweg" der Ableitung sphärischer Gleichungen über kartesische Gleichungen geschehen. Daraus folgt aber, daß auch eine vektorielle horizontale Bewegungsgleichung *nicht* direkt in sphärische Koordinaten zerlegt werden darf, da auch hier bereits "vorzeitige" (horizontale) Komponentenbildungen stattgefunden haben, die eine Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit von \mathbf{k} verhindern. Die Berücksichtigung der Ortsabhängigkeit der Basisvektoren in Kugelkoordinaten erfolgt über die dreidimensionalen Frenet'schen Formeln:

$$(B-7) \quad \begin{array}{lll} \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \lambda} = \sin \varphi \mathbf{j} - \cos \varphi \mathbf{k} & \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \lambda} = -\sin \varphi \mathbf{i} & \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \varphi} = -\mathbf{k} & \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \lambda} = \cos \varphi \mathbf{i} & \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = \mathbf{j} & \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial r} = 0 \end{array}$$

Berücksichtigt man diese Formeln in der Auswertung der advektiven Beschleunigung

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left(\frac{v_\lambda}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + v_r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right)$$

und führt *man* die Komponentenbildungen durch Skalarmultiplikation mit $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ erst danach durch, so erhält man (B-3) *mit allen Termen*. - Auch bei der Verwendung der natürlichen Koordinaten in Kap.3.3(a) mußten wir nichtverschwindende Ableitungen der Basisvektoren berücksichtigen. Das geschah mit Hilfe der "Frenet'schen Formeln in der Ebene" (3-25):

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \kappa_s \mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial s} = - \kappa_s \mathbf{t} \quad \text{mit } \kappa_s = \frac{1}{R_s}$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial n} = \kappa_n \mathbf{n} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial n} = - \kappa_n \mathbf{t} \quad \text{mit } \kappa_n = \frac{1}{R_n}$$

Die entsprechenden sphärischen Formeln (B-7) sind einerseits natürlich allgemeiner, weil sie die dritte Dimension ins Spiel bringen (daher sind es 9 statt 4 Gleichungen), andererseits sind sie spezieller, weil statt der beliebigen und ortsabhängigen Krümmungen κ_s und κ_n nur die Krümmungen $1/r$ bzw. $1/(r \cos \varphi)$ von Längen- und Breitenkreisen auftreten können. - Zur weiteren Veranschaulichung betrachten wir nacheinander die Änderungen in φ -, r - und λ - Richtung.

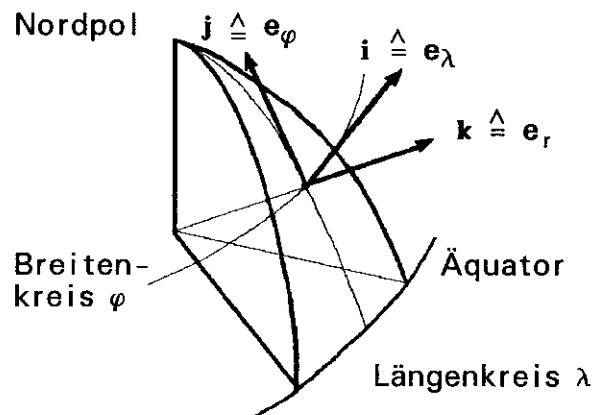
Ableitungen nach φ : Die Schnittebene durch einen Längenskreis λ ($\lambda = \text{const}$) ist eine Ebene, in der die Frenet'schen Formeln (3-25) gelten, wobei $\mathbf{j} \hat{=} \mathbf{t}$ der Tangentialvektor ist, - $\mathbf{k} \hat{=} \mathbf{n}$ der Normalvektor und \mathbf{i} der "Binormalvektor". Der letztere bleibt konstant in der Schnittebene, d.h. $\partial \mathbf{i} / \partial \varphi = 0$. Weiterhin folgt

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \varphi} = r \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} \hat{=} r \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = r \kappa_s \mathbf{n} \hat{=} \frac{r}{r} (-\mathbf{k}) \quad \text{q.e.d}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \varphi} = r \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial y} \hat{=} r \frac{\partial (-\mathbf{n})}{\partial s} = r \kappa_s \mathbf{t} \hat{=} \frac{r}{r} \mathbf{j} \quad \text{q.e.d}$$

Ableitungen nach r : Bei Änderung von r bleiben $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ invariant, daher verschwinden alle Ableitungen nach r .

Ableitungen nach λ : Die Schnittebene durch einen Breitenkreis φ ($\varphi = \text{const}$) ist keine Ebene, in der die Frenet'schen Formeln gelten: Zwar ist \mathbf{i} der Tangentialvektor an den Breitenkreis $\varphi = \text{const}$, aber weder \mathbf{j} noch \mathbf{k} liegen in der Ebene und weder \mathbf{j} noch \mathbf{k} können der Normalvektor sein. (Es ist keine "Schmiegeebene")! Daher sind die Ableitungen nach λ innerhalb (B-7) nicht aus den Frenet'schen Formeln in der Ebene erklärbar! Wir begnügen uns mit einer Plausibilitätsbetrachtung: Eine "Fahrt" auf einem Längenskreis ist eine Fahrt "über einen Berg". Dabei "senkt sich" \mathbf{j} , d.h. $\partial \mathbf{j} / \partial \varphi = - \mathbf{k}$, und \mathbf{k} "kippt nach vorn" d.h. $\partial \mathbf{k} / \partial \varphi = \mathbf{j}$. Dies ist eine *qualitative Begründung der Ableitung nach φ* , aber wir können die gleiche Betrachtung *auch für die Ableitungen nach λ* anstellen: Eine "Fahrt" auf einem Breitenkreis ist eine Fahrt "über den Berg" und "durch eine Linkskurve", wie die folgende Skizze veranschaulicht.



\mathbf{k} ist der Normalvektor nach oben. Er wird durch die Linkskurve nicht beeinflusst, aber er kippt wegen der "Bergfahrt" nach vorn, d.h. $\partial \mathbf{k} / \partial \lambda \cong \mathbf{i}$

\mathbf{j} ist der Normalvektor nach links. Er wird durch die Fahrt "über den Berg" nicht beeinflusst, aber dreht sich wegen der Linkskurve "nach hinten weg", d.h. $\partial \mathbf{j} / \partial \lambda \cong -\mathbf{i}$

\mathbf{i} ist der Tangentialvektor. Er dreht sich in der Kurve nach links und er senkt sich wegen der "Bergfahrt", d.h. $\partial \mathbf{i} / \partial \lambda \cong \mathbf{j}$ und $\partial \mathbf{i} / \partial \lambda \cong -\mathbf{k}$.

Die Faktoren in diesen Proportionalitätsbeziehungen sind $\sin \varphi$ bzw. $\cos \varphi$. Auch das ist plausibel: Der "Kurveneffekt" ist proportional zu $\sin \varphi$ (er ist in Polnähe am größten und verschwindet am Äquator). Der "Bergeffekt" ist proportional zu $\cos \varphi$ (er verschwindet bei der engen "Umkreisung" des Nordpols und ist am Äquator am größten).

B.1(b) Kontinuitätsgleichung

Auch die Überführung der Kontinuitätsgleichung in Kugelkoordinaten wurde von Hinkelmann (1969) durch Spezialisierung generalisierter Koordinaten und Geschwindigkeiten vorgenommen. Bei Verwendung der Summenkonvention gilt

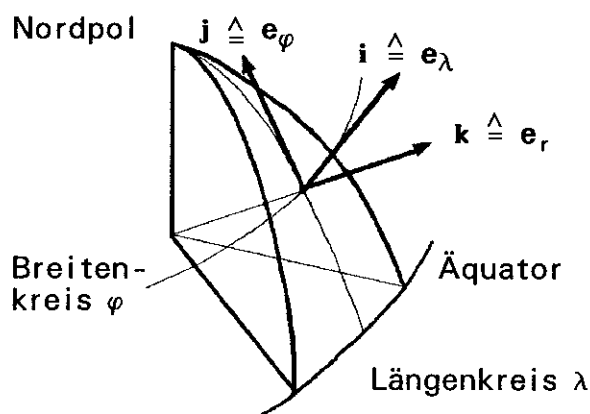
$$(B-8) \quad \frac{1}{\rho D} \frac{d}{dt} (\rho D) + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = 0$$

wobei D folgendermaßen aus einer Determinante zu gewinnen ist:

$$(B-9) \quad D = \sqrt{\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|} = \sqrt{\left| \frac{\partial^2 K^{(A)}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|}$$

Da in der Determinante D^2 nur Ableitungen nach generalisierten Geschwindigkeiten vorkommen, ist von

$$L = K^{(A)}(\dot{q}_i, q_j) - \Phi^{(A)}(q_j)$$



\mathbf{k} ist der Normalvektor nach oben. Er wird durch die Linkskurve nicht beeinflusst, aber er kippt wegen der "Bergfahrt" nach vorn, d.h. $\partial \mathbf{k} / \partial \lambda \cong \mathbf{i}$

\mathbf{j} ist der Normalvektor nach links. Er wird durch die Fahrt "über den Berg" nicht beeinflusst, aber dreht sich wegen der Linkskurve "nach hinten weg", d.h. $\partial \mathbf{j} / \partial \lambda \cong -\mathbf{i}$

\mathbf{i} ist der Tangentialvektor. Er dreht sich in der Kurve nach links und er senkt sich wegen der "Bergfahrt", d.h. $\partial \mathbf{i} / \partial \lambda \cong \mathbf{j}$ und $\partial \mathbf{i} / \partial \lambda \cong -\mathbf{k}$.

Die Faktoren in diesen Proportionalitätsbeziehungen sind $\sin \varphi$ bzw. $\cos \varphi$. Auch das ist plausibel: Der "Kurveneffekt" ist proportional zu $\sin \varphi$ (er ist in Polnähe am größten und verschwindet am Äquator). Der "Bergeffekt" ist proportional zu $\cos \varphi$ (er verschwindet bei der engen "Umkreisung" des Nordpols und ist am Äquator am größten).

B.1(b) Kontinuitätsgleichung

Auch die Überführung der Kontinuitätsgleichung in Kugelkoordinaten wurde von Hinkelmann (1969) durch Spezialisierung generalisierter Koordinaten und Geschwindigkeiten vorgenommen. Bei Verwendung der Summenkonvention gilt

$$(B-8) \quad \frac{1}{\rho D} \frac{d}{dt} (\rho D) + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = 0$$

wobei D folgendermaßen aus einer Determinante zu gewinnen ist:

$$(B-9) \quad D = \sqrt{\left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|} = \sqrt{\left| \frac{\partial^2 K^{(A)}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right|}$$

Da in der Determinante D^2 nur Ableitungen nach generalisierten Geschwindigkeiten vorkommen, ist von

$$L = K^{(A)}(\dot{q}_i, q_i) - \Phi^{(A)}(q_i)$$

nur der Summand $K^{(A)}$ zu verwenden. Statt eines Beweises begnügen wir uns wie bei der Bewegungsgleichung mit einer "Probe" in kartesischen Koordinaten. Mit

$$K^{(A)} = \frac{1}{2} (v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2),$$

(v_{ax}, v_{ay}, v_{az} sind die Komponenten des *absoluten Windes*), folgt

$$\left| \frac{\partial^2 K^{(A)}}{\partial v_{a_i} \partial v_{a_j}} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

d.h. $D = 1$. Wegen $\nabla \cdot \mathbf{v}_a = \nabla \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}_f) = \nabla \cdot \mathbf{v}$ (die Führungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_f = \omega \times \mathbf{r}$ ist divergenzfrei) folgt aus (B-8) die bekannte Kontinuitätsgleichung. - Nun spezialisieren wir ^{uns} auf Kugelkoordinaten und verwenden wieder die Komponenten v_x, v_y, v_z des *Relativwindes*.

$$\begin{aligned} K^{(A)} &= \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{v}_f)^2 & \mathbf{v}_f &= r \omega \cos\varphi \mathbf{i} \rightarrow \\ &= \frac{1}{2} \left([v_\lambda + r \omega \cos\varphi] \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right)^2 & v_\lambda &= r \cos\varphi \dot{\lambda} \rightarrow \\ &= \frac{1}{2} \left(r^2 \cos^2\varphi [\dot{\lambda} + \omega]^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \right) \end{aligned}$$

Hier mußten die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i = \dot{\lambda}, \dot{\varphi}, \dot{r}$ eingesetzt werden, weil nach ihnen abzuleiten ist:

$$\left| \frac{\partial^2 K^{(A)}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right| = \begin{vmatrix} r^2 \cos^2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r^4 \cos^2\varphi$$

Aus $D = r^2 \cos\varphi$ und (B-8) ergibt sich:

$$\frac{1}{\rho r^2 \cos\varphi} \frac{d}{dt} (\rho r^2 \cos\varphi) + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2}{r} \dot{r} - \tan\varphi \dot{\varphi} + \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} = 0$$

$$(B-10) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{2v_r}{r} - \frac{\tan\varphi}{r} v_\varphi + \frac{1}{r \cos\varphi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0 \quad \text{oder}$$

$$(B-11) \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r \cos\varphi} \left\{ \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v_\varphi \cos\varphi)}{\partial \varphi} \right\} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} = 0$$

Wegen $|v_r| \ll v_\varphi$ ist nach einer Scaleanalyse der unterstrichene Term zu vernachlässigen. Vergleichen wir (B-10) mit der Vektorform $(1/\rho)d\rho/dt + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ der Kontinuitätsgleichung, erhalten wir auch die Divergenz in Kugelkoordinaten:

$$(B-12) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\tan \varphi}{r} v_\varphi + \frac{2v_r}{r}$$

vergleicht man dies mit dem Advektionsoperator (B-6), so kommt noch einmal die Rolle der sphärischen Frenet'schen Formeln (B-7) zum Ausdruck: In (B-6) ist der Operator ∇ noch "hungrig". In (B-12) dagegen hat er schon \mathbf{v} und damit auch die Basisvektoren \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} "verarbeitet". Daß tatsächlich die in (B-12) "zusätzlichen" Terme $-v_\varphi \tan \varphi / r$ und $2v_r / r$ aus den Frenet'schen Formeln (B-7) resultieren, zeigt eine explizite Berechnung von

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{\mathbf{i}}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\mathbf{j}}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial r} \right] \cdot \left[v_\lambda \mathbf{i} + v_\varphi \mathbf{j} + v_r \mathbf{k} \right]$$

unter Beachtung der Produktregel und (B-7). Analog zur Umformung von (B-10) nach (B-11) gilt auch die Darstellung

$$(B-13) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v_\varphi \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right\} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r}$$

Die Kontinuitätsgleichung hat im Relativ- und im Absolutsystem die gleiche Form. Das liegt daran, daß die Divergenz der Führungsgeschwindigkeit $\omega \cos \varphi \mathbf{i}$ verschwindet, was man bei Anwendung von (B-13) sofort sieht.

B.1(c) Erster Hauptsatz

Drückt man den ersten Hauptsatz durch die Potentielle Temperatur aus, z.B. im adiabatischen Fall $d\theta/dt = 0$, so bereitet die Darstellung in Kugelkoordinaten keinerlei Probleme. Es ist lediglich die Form (B-4) des individuellen Zeitoperators zu verwenden. Die Frenet'schen Formeln (B-7) kommen nicht zur Anwendung, da nur der *Skalar* θ abzuleiten ist. Schreibt man den adiabatischen ersten Hauptsatz allerdings in der Form $\rho c_v dT/dt = -p \nabla \cdot \mathbf{v}$, so kommen die Frenet'schen Formeln (B-7) doch zum Einsatz, und zwar mit dem Ergebnis (B-12) oder (B-13) für $\nabla \cdot \mathbf{v}$.

B.1(d) Barotrope Vorticitygleichung

Die barotrope Vorticitygleichung lautet im z-System:

$$(B-14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h^2 \psi + \mathbf{J} \left[\psi, \nabla_h^2 \psi + f \right] = 0$$

Sie entsteht aus (4-26) im p-System, wenn dort $\partial \omega / \partial p = 0$ gesetzt wird und somit der Erste Hauptsatz abgekoppelt wird (\rightarrow Kap. 4.6). Zur Bestimmung des Laplace-Operators ∇_h^2 in Kugelkoordinaten sind wiederum die Frenet'schen Formeln (B-7) zu beachten:

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 &= \left(\mathbf{i} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mathbf{j} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial \lambda} \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$(B-15) \quad \nabla_h^2 = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Obwohl nach der Produktregel \mathbf{i} und \mathbf{j} nach λ und φ abgeleitet werden, ergibt nur $\partial \mathbf{j} / \partial \lambda = -\sin \varphi \mathbf{i}$ einen nichtverschwindenden Beitrag. Ferner ist in kartesischen Koordinaten mit beliebigem α

$$J(\psi, \alpha) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

also in Kugelkoordinaten mit (B-1):

$$J(\psi, \alpha) = \frac{\partial \psi}{r \cos \varphi} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = \left\{ \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} \alpha$$

In (B-14) ist $\alpha = \nabla_h^2 \psi + f$. Offenbar folgt für den f -Anteil wegen $f = 2\omega \sin \varphi$ (d.h. f hängt nicht von λ ab):

$$J(\psi, f) = \frac{2\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

Der ganze Jacobi-Operator in (B-14) lautet also

$$(B-16) \quad J\left(\psi, \nabla_h^2 \psi + f\right) = \left\{ \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} \nabla_h^2 \psi + \frac{2\omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$$

mit (B-15) für $\nabla_h^2 \psi$. - Um die Vorticitygleichung (B-14) in Kugelkoordinaten zu formulieren, muß man nur noch die Operatoren in der Klammer der rechten Seite von (B-16) um $\partial / \partial t$ ergänzen. Setzt man (B-15) ein und multipliziert die ganze Gleichung mit r^2 , so folgt

(B-17)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right\} \cdot \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \tan \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right] + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0$$

Diese nichtlineare Gleichung wird in Kap. 3.13 analytisch gelöst! Dazu müssen jedoch im nächsten Kapitel noch einige mathematische Hilfsmittel bereitgestellt werden.

B.2 LEGENDRE-POLYNOME UND KUGELFUNKTIONEN

Die Legendre-Differentialgleichung lautet

$$(B-18) \quad \frac{d}{dx} \left([1-x^2] \frac{d}{dx} \right) P_n(x) = -n(n+1) P_n(x)$$

Dies ist eine Eigenwertgleichung: $n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ sind *Eigenwerte*, die Legendre-Polynome P_n sind *Eigenfunktionen*. Sie gelten nur für $x \in [-1, 1]$. Die "*Lösungen 1. Art*" dieser Gleichung sind durch Polynome n -ten Grades gegeben:

$$(B-19) \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

Die Legendre-Polynome sind "orthogonal" im Sinne der Funktionalanalysis, da

$$(B-20) \quad \int_{-1}^1 P_n(x) P_l(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nl}$$

Die ersten Legendre-Polynome sind gegeben durch

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x^2-1) = x$$

$$P_2 = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} (x^2-1)^2 \right) = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \left(2(x^2-1) 2x \right) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_3 = \frac{1}{48} \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} (x^2-1)^3 \right) \right) = \frac{5}{2} x^3 - \frac{3}{2} x$$

Durch direktes Einsetzen kann man zeigen, daß die Legendre-Differentialgleichung in allen Fällen erfüllt ist. (Natürlich muß auch noch "von n auf $n+1$ " geschlossen werden). Die Berechnungen können durch eine Rekursionsformel vereinfacht werden:

$$P_n = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1} - \frac{n-1}{n} P_{n-2}$$

Ausgehend von $P_0 = 1$ lassen sich die obigen Polynome für $n = 1, 2, 3$ direkt nachrechnen, und darüberhinaus

$$P_4 = \frac{1}{8} \left(35 x^4 - 30 x^2 + 3 \right)$$

$$P_5 = \frac{1}{8} \left(63 x^5 - 70 x^3 + 15 x \right) \quad \text{u.s.w.}$$

Die Differentialgleichung für die "Zugeordneten Legendrepolynome", auch "*allgemeine Legendre'sche Differentialgleichung*" genannt, lautet:

$$(B-21) \quad \frac{d}{dx} \left([1-x^2] \frac{d}{dx} \right) P_n^m(x) - \frac{m^2}{1-x^2} P_n^m(x) = -n(n+1) P_n^m(x)$$

Die Lösungen P_n^m sind wieder Polynome n -ten Grades, denn P_n wird $m \leq n$ mal differenziert und mit einem Polynom m -ten Grades multipliziert. Sie lauten:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \quad \text{mit} \quad m \leq n \quad \text{Beispiele:}$$

$$P_0^0 = P_0 = 1$$

$$P_1^0 = P_1 = x$$

Es gilt allgemein $P_n^0 = P_n$!

$$P_1^1 = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} x = (1-x^2)^{1/2}$$

$$P_2^0 = P_2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_2^1 = (1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} P_2 = (1-x^2)^{1/2} 3x$$

$$P_2^2 = (1-x^2) \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} P_2 \right) = (1-x^2) \frac{d}{dx} 3x = 3(1-x^2)$$

:

$$P_5^4 = (1-x^2)^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x) \right) \right) \right) \right)$$

$$P_5^4 = 945 x (1-x^2)^2$$

Durch Transformation der Variablen

$$x = \sin\varphi, \quad dx = \cos\varphi d\varphi$$

erhält man eine trigonometrische Darstellung. Da $x \in [-1, 1]$, ist $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. φ entspricht der Breite ("latitude") auf der Erdkugel. In der Physik ist es üblich eine andere Transformation durchzuführen: $x = \cos\varphi$, d.h. $dx = -\sin\varphi$. In diesem Fall ist $\varphi \in [-\pi, 0]$. φ wird dann "colatitude" genannt. Nach dieser Transformation erhält man die ^{schöne} Legendre Differentialgleichung sowie die Lösungen 1. Art:

$$(B-22) \quad \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} - \tan\varphi \frac{d}{d\varphi} \right] P_n(\sin\varphi) = -n(n+1) P_n(\sin\varphi) \quad \text{mit}$$

$$P_n(\sin\varphi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(\sin\varphi)^n} (-\cos^2\varphi)^n$$

sowie die allgemeine Legendre'sche Differentialgleichung und die zugeordneten Legendrepolynome

$$(B-23) \quad \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} - \tan\varphi \frac{d}{d\varphi} - \frac{m^2}{\cos^2\varphi} \right] P_n^m(\sin\varphi) = -n(n+1) P_n^m(\sin\varphi) \quad \text{mit}$$

$$P_n^m(\sin\varphi) = \cos^m\varphi \frac{d^m}{d(\sin\varphi)^m} P_n(\sin\varphi)$$

Sowohl die gewöhnlichen als auch die zugeordneten Legendrepolynome hängen von *einer* Variablen ab (x bzw. φ) und können daher nicht auf einer Kugeloberfläche definiert sein. Eine echte Kugelflächenfunktion ist dagegen

$$(B-24) \quad Y_n^m = N_{nm} e^{im\lambda} P_n^m(\sin\varphi) \quad , \quad m \leq n$$

da durch den Exponentialfaktor zur "Breitenabhängigkeit" φ eine "Längenabhängigkeit" hinzugefügt worden ist. (N_{nm} sind Normierungsfaktoren).

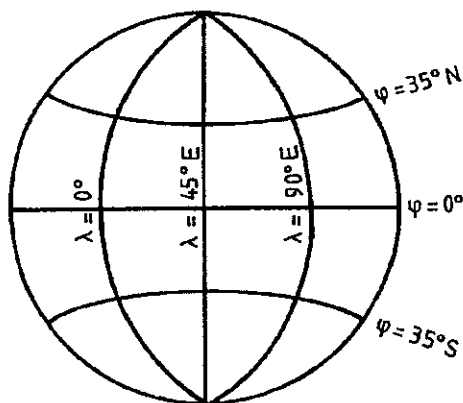
Y_n^m genügt der Differentialgleichung, die aus der "allgemeinen" Legendre-Differentialgleichung durch die Ersetzung $m^2 \rightarrow -\partial^2/\partial\lambda^2$ entsteht. Das sieht man durch Einsetzen und Abseparieren der φ -Abhängigkeit. Die Differentialgleichung für Kugelflächenfunktionen lautet also

$$(B-25) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \tan\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \right] Y_n^m(\lambda, \varphi) = -n(n+1) Y_n^m(\lambda, \varphi)$$

Durch Vergleich mit (B-15) stellen wir fest, daß die Kugelflächenfunktionen die Eigenfunktionen des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten sind, mit den Eigenwerten $n(n+1)$. Die Kugelflächenfunktionen lösen die "homogene Potentialgleichung". Für uns ist interessant, daß der Laplace-Operator auch Bestandteil der barotropen Vorticitygleichung (B-17) ist.

Geometrische Veranschaulichung der ersten Kugelflächenfunktionen durch ihre Knotenlinien (Nulllinien):

In allen folgenden graphischen Darstellungen blicken wir auf die Erdkugel "von Pol zu Pol" und von den Längen 45°W bis 135°E. Wir benutzen also ein "Gesichtsfeld" der Erde, das durch das folgende Schemabild der Kugel wiedergegeben ist:



Gesichtsfeld:
λ = 45 W bis 135 E

Auf Normierungen N_{nm} wird im folgenden nicht geachtet.

■ $Y_0^0 = 1$

(bis auf Normierung). Hier gibt es keine Knotenlinien. Die Kugelflächenfunktion ist immer positiv.

Knotenlinien von Y_1^m :

- $Y_1^0 = P_1 = x = \sin\varphi \stackrel{!}{=} 0$

d.h. die Knotenlinie befinden sich bei $\varphi = 0$

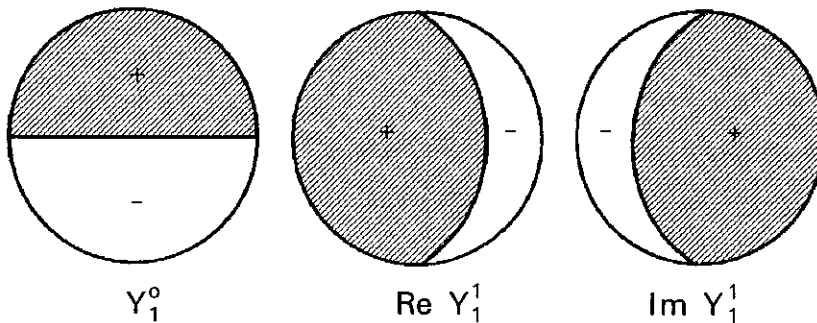
- $Y_1^1 = e^{i\lambda} P_1^1 = e^{i\lambda} (1 - x^2)^{1/2} = e^{i\lambda} \cos\varphi = \cos\lambda \cos\varphi + i \sin\lambda \cos\varphi \stackrel{!}{=} 0$

Da $\cos\varphi$ nur an den Polen verschwindet, ist

$\cos\lambda \cos\varphi = 0$ wenn $\cos\lambda = 0$ d.h. für $\lambda = 90^\circ$ und

$\sin\lambda \cos\varphi = 0$ wenn $\sin\lambda = 0$ d.h. für $\lambda = 0^\circ$

Das ergibt für den Realteil im "Gesichtsfeld" eine Knotenlinie bei $\lambda=90^\circ$, und für den Imaginärteil eine Knotenlinie bei $\lambda=0^\circ$:

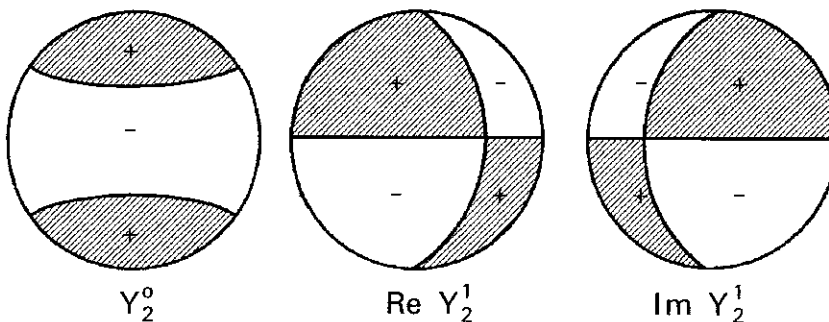


Knotenlinien von Y_2^m :

- $Y_2^0 = P_2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \sin^2\varphi - \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$ das gilt für $\sin^2\varphi = \frac{1}{3}$, d.h. $\sin\varphi = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow$ Knotenlinien bei $\varphi \cong \pm 35^\circ$

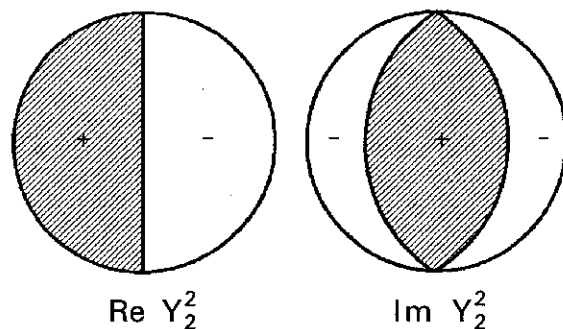
- $Y_2^1 = e^{i\lambda} P_2^1 = e^{i\lambda} 3 x (1-x^2)^{1/2} = 3 e^{i\lambda} \sin\varphi \cos\varphi = 3 \cos\lambda \cos\varphi \sin\varphi + 3 i \sin\lambda \cos\varphi \sin\varphi \stackrel{!}{=} 0$

Die Knotenlinien des Realteiles liegen bei $\lambda = 90^\circ, \varphi = 0^\circ$, die des Imaginärteiles bei $\lambda = 0^\circ, \varphi = 0^\circ$:



$$\begin{aligned} \blacksquare Y_2^2 &= e^{i2\lambda} 3(1 - x^2) = 3 e^{i2\lambda} \cos^2\varphi \\ &= 3 \cos 2\lambda \cos^2\varphi + 3 i \sin 2\lambda \cos^2\varphi \quad \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die Knotenlinien des Realteiles liegen bei $\lambda = \pm 45^\circ$, $\lambda = 135^\circ$, die des Imaginärteiles bei $\lambda = 0^\circ, \lambda = 90^\circ$.



Im linken Bild ist zu beachten, daß die äußere Berandung des "Gesichtsfeldes" *auch* Knotenlinien sind (die Nulllinien bei $\lambda = -45^\circ$ und bei $\lambda = 135^\circ$).

Zusammenfassung: In *allen Beispielen* haben Y_n^m :

- nur breitenkreisparallele Knotenlinien, falls $m = 0$
- nur längenkreisparallele Knotenlinien, falls $m = n$
- Schnittpunkte von Knotenlinien, falls $0 < m < n$

Dies gilt auch allgemein. Daher nennt man Y_n^m :

- zonale Kugelflächenfunktionen, falls $m = 0$
- sektorielle Kugelflächenfunktionen, falls $m = n$
- tesserale Kugelflächenfunktionen, falls $0 < m < n$

Ferner erkennt man, daß $2m$ die Zahl der Nulldurchgänge auf den Breitenkreisen ist, und $n-m$ die Zahl der Nulldurchgänge von Pol zu Pol. Daher nennt man m die Wellenzahl auf den Breitenkreisen, und $n-m$ "meridionale" Wellenzahl.